

6. INTEGRALES DE LÍNEA

6.5. Ejercicios complementarios

1. Calcula el valor de las siguientes integrales de línea:

- (a) La integral de $F(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ sobre el hipocicloide $\alpha(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$, $t \in [0, 2\pi]$.
- (b) $\int_{\gamma} (10xz^3 + 1)dx - 6y^2dy + 15x^2z^2dz$, donde γ es el trozo de la hélice parametrizada por $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, \frac{t}{\pi})$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
- (c) La integral de $F(x, y, z) = (z + xy)\mathbf{i} + (z^2 + x^2)\mathbf{j} - 5xy\mathbf{k}$ sobre el contorno del cuadrado unidad $[0, 1]^2$, en el plano $z = 0$, orientado positivamente.

2. Calcula la integral:

$$I = \int_{\gamma} \frac{2xy(y+2)dx + (y^2 - 2x^2 - 2x^2y)dy}{(2x^2 + y^2)^2}$$

donde γ es:

- (a) El segmento de extremos $A(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ y $B(0, 1)$;
 - (b) El polígono cerrado de vértices $M(0, 3)$, $N(1, 2)$, $O(1, 0)$, $P(-2, 3)$ y $Q(-3, \frac{1}{2})$.
3. Utiliza el teorema de Green para hallar la integral de $F(x, y) = (y^2 + x^3)\mathbf{i} + x^4\mathbf{j}$ sobre el perímetro del cuadrado unidad $[0, 1]^2$ orientado positivamente.
4. Aplicando el Teorema de Green, calcula la integral curvilínea

$$\int_{\gamma} e^{y^2} dx + (2xye^{y^2} + x + e^{y^3}) dy$$

donde γ es la curva formada por el segmento que va de $(0, 0)$ a $(1, 1)$ seguido por el segmento que va de $(1, 1)$ a $(2, 0)$.

5. Utilizando el teorema de Green, halla la integral curvilínea:

$$\int_{\gamma} (1 + y)e^{x-y} dx + (x^5 - ye^{x-y}) dy$$

donde γ es el arco de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, orientada positivamente, comprendido en el primer cuadrante.

6. Calcula el valor de las siguientes integrales curvilíneas:

$$\int_{\gamma} (2xe^{x^2+2y^2} - y) dx + (4ye^{x^2+2y^2} + x^2) dy$$

donde γ es:

- (a) el arco de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, orientada positivamente, comprendido en el primer cuadrante.
- (b) el arco de la curva $y = 2 - x^2$ que va desde el punto $A(1, 1)$ hasta el punto $B(-1, 1)$.

Soluciones y/o sugerencias a los ejercicios:

- 1. (a) 0; (b) 40; (c) $\frac{1}{2}$.
- 2. (a) $-\frac{3}{2}$; (b) 0.
- 3. 0.
- 4. 1.
- 5. $\frac{5\pi}{32} + \frac{2}{e} - e$.
- 6. (a) $\frac{\pi}{4} + \frac{2}{3} + e(e-1)$; (b) $\frac{10}{3}$.